MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

(Epreuve normale)

DURÉE : 3 heures

PRÉAMBULE

Dans tout le problème, I désignera l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ de $\mathbf{R}$; a et b désigneront des réels soumis aux conditions (C) $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Enfin, pour tout couple (p, q) de deux réels, on considérera l'équation différentielle du second ordre sur I :

$$x^2 y'' - p\,x\,y' + q\,y = 0 \text{ notée } E_{p,\,q} ;$$

selon l'usage y, y', y'' désignent les valeurs, pour la même valeur de x de la variable, d'une fonction, de sa dérivée première et de sa dérivée seconde. On admettra que, le couple (p, q) étant fixé, les applications de I dans $\mathbf{R}$, solution de $E_{p,\,q}$ forment un espace vectoriel de dimension deux.

I. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

On note E l'équation particulière obtenue pour $p = 3$, $q = 5$ c'est-à-dire $x^2 y'' - 3\,x\,y' + 5\,y = 0$.

1° Soit f une solution de E; soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(ax)$; montrer que g est aussi une solution de E.

2° Vérifier que la fonction f_0, définie par $f_0(x) = x^2 \cos(\log x)$ est une solution de E.

3° Soit g_0 la fonction définie par $g_0(x) = f_0(ax)$. Montrer que, sauf pour certaines valeurs de a que l'on précisera, la famille $\{ f_0, g_0 \}$ est une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur I.

4° En déduire qu'on obtient toutes les solutions de E par la formule :

$$f(x) = H\,x^2 \cos\left(\text{Log}\,\frac{x}{c}\right)$$

H étant un réel arbitraire et c un réel strictement positif arbitraire.

5° Soit, dans un plan rapporté à un repère cartésien, Γ_0 la représentation graphique de f_0 et Γ la représentation graphique d'une solution f de E. Par quelles transformations géométriques très simples peut-on passer de Γ_0 à Γ ?

II. ÉTUDE DE LA FONCTION f_0

La courbe Γ_0 représentation graphique de f_0 coupe l'axe $x'Ox$ aux points d'abscisses

$$x_k = e^{\frac{\pi}{2} + k\pi} \qquad (k \in \mathbf{Z}) ;$$

on appelle γ_k l'arc de Γ_0 défini par :

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k \qquad y = f_0(x)$$

1° Calculer les intégrales :

$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_0(x)\,dx$$

(on pourra faire le changement de variables $x = e^t$).

2° Montrer que l'intégrale $\int_0^{x_0} f_0(x)\,dx$ est convergente; en donner la valeur.

L'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} f_0(t)\,dt$ est-elle convergente?

3° Calculer les coordonnées du point T_0 de γ_0 correspondant au maximum de f_0, ainsi que celles du point d'inflexion, J_0 de γ_0.

En déduire (on précisera les unités prises sur les axes) un tracé de γ_0.

On donnera des valeurs approchées des coordonnées demandées; on pourra utiliser les résultats numériques suivants :

$e^{\frac{\pi}{2}} \simeq 4{,}810$ $\quad e^{\frac{-\pi}{2}} \simeq 0{,}208$ $\quad \text{Arc tg } 2 \simeq 1{,}108$ $\quad \text{Arc tg}\,\frac{1}{3} \simeq 0{,}322$

la précision de la règle à calculs sera suffisante.

III. RELATION ENTRE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE E ET UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

1° Soit f une solution de E; montrer qu'il existe des couples (a, b) de réels vérifiant les conditions (C) du préambule telles que l'on ait :

$$\forall\, x \in I \qquad f(ax) = b\,f(x)$$

2° On suppose maintenant que a et b sont *donnés* et vérifient les conditions (C); on cherche les fonctions f définies sur I qui vérifient la relation F, dite « équation fonctionnelle » :

$$F \qquad \forall\, x \in I \qquad f(ax) = b\,f(x)$$

.../...

(Tous les logarithmes utilisés ici sont népériens)

3° *a.* Montrer que F a une solution f_2 de la forme $x \longmapsto x^\alpha$.

b. On fait alors les changements de fonction inconnues définies par :

$$f(x) = f_2(x)\, g(x)$$

puis par :

$$g(x) = h(\text{Log } x), \text{ c'est-à-dire } h(x) = g(e^x)$$

h étant définie sur $\mathbf{R}$.

Caractériser, par une propriété très simple, les fonctions h telles que f soit solution de l'équation fonctionnelle F.

c. On suppose, en outre, $b = a^2$ et que f est solution continue de F; montrer que $f(x)$ a une limite quand x tend vers zéro par valeurs positives et que le prolongement par continuité en 0 de la fonction f, admet une dérivée à droite en 0.

IV. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $E_{p,q}$ DANS CERTAINS CAS

1° Montrer que deux solutions particulières de F sont les fonctions f_3 et f_4 données par

$$f_3(x) = x^\alpha \cos(\beta \log x)$$
$$f_4(x) = x^\alpha \sin(\beta \log x)$$

pour des valeurs convenables des constantes α et β qu'on déterminera en fonction de a et b supposés donnés.

2° Vérifier qu'il existe un couple (p, q) de deux réels tels que f_3 et f_4 soient solutions de la même équation $E_{p,q}$.

3° En déduire, inversement, les solutions de $E_{p,q}$ lorsque p et q vérifient l'inégalité : $q > \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$.

4° On suppose $q = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$; montrer que $E_{p,q}$ admet une solution de la forme f_2 $x \longmapsto x^\alpha$.

En prenant pour nouvelle fonction inconnue la fonction u définie par $f(x) = x^\alpha u(x)$, trouver, dans ce cas, toutes les solutions de $E_{p,q}$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail